

Мойсеєнко О.В.

<https://orcid.org/0000-0002-7995-2949>

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

Пашкевич О.П.

<https://orcid.org/0000-0001-7254-3512>

Заклад вищої освіти «Університет Короля Данила»

КОМБІНАТОРНЕ ВДОСКОНАЛЕННЯ АЛГОРИТМІВ КЛАСУ FFD ДЛЯ ПЛАНУВАННЯ ЗАДАЧ У БАГАТОЯДЕРНИХ ПРОЦЕСОРАХ

У статті розглянуто задачу планування незалежних задач у гетерогенних багатоядерних системах з урахуванням обмежень продуктивності, енергоспоживання та надійності, що є ключовими для сучасних вбудованих і високопродуктивних обчислювальних платформ. Показано, що класичні жадібні алгоритми, зокрема First-Fit Decreasing (FFD), демонструють нестабільну ефективність на важкохвостових розподілах навантаження, тоді як еволюційні підходи мають високу обчислювальну складність. Запропоновано комбінаторно вдосконалений алгоритм CE-FFD, що поєднує структурну ефективність FFD із поглибленим комбінаторним аналізом простору рішень. Алгоритм використовує породжувальні функції та числа Стірлінга для формування підпростору кандидатних розподілів, локальний пошук типу 2-орт для покращення початкових конфігурацій та енергетичну оптимізацію на основі DVFS. Отримано строгі теоретичні результати: доведено додатну комбінаторну цілісність підпростору рішень, кращих за FFD, та показано, що ймовірність отримання оптимізованого багатокритеріального розподілу експоненційно зростає зі збільшенням числа семплів. Експериментальні дослідження на синтетичних та реалістичних навантаженнях продемонстрували зниження makespan на 5–16%, скорочення енергоспоживання на 10–16% та підвищення показника надійності до 0.015 у порівнянні з FFD. Запропонований алгоритм є ефективним і практично придатним для планування задач у гетерогенних системах та забезпечує збалансований компроміс між продуктивністю, енергоефективністю та відмовостійкістю.

Ключові слова: гетерогенне планування, багатоядерні системи, комбінаторний семплінг, CE-FFD, DVFS, енергоефективність, числа Стірлінга.

Постановка проблеми. Стрімке зростання обчислювальних потреб у сучасних інформаційних системах зумовлює масове впровадження багатоядерних процесорів у високопродуктивних (HPC), вбудованих (embedded) та кіберфізичних системах. Гетерогенність архітектур, різноманітність обчислювальних ядер та наявність динамічних потоків задач роблять проблему ефективного планування ресурсів однією з ключових у комп'ютерній інженерії. У таких системах ефективність розподілу задач безпосередньо впливає на продуктивність, енергоспоживання, термічну стабільність і відмовостійкість, що є критичними показниками для телекомунікаційного обладнання, автомобільної електроніки, IoT-платформ і систем реального часу.

Планування задач у багатоядерних середовищах належить до класу NP-складних комбінаторних задач оптимізації: класичні варіанти зводяться до задач пакування у контейнери (bin-packing), розбиття множин (set partitioning), задачі багатопроцесорного розкладу (multiprocessor scheduling). Відомі евристичні – зокрема First-Fit Decreasing (FFD) – забезпечують прийнятні апроксимаційні оцінки, однак втрачають ефективність за умов гетерогенності ресурсів, динамічної появи задач та необхідності комплексного врахування енергетичних і надійнісних критеріїв. Жоден із базових підходів не забезпечує одночасно мінімізацію makespan, обмеження енергоспоживання в умовах DVFS та забезпечення заданого рівня надійності при появі транзитних або постійних збоїв.



Комбінаторний аналіз – зокрема використання чисел Стірлінга другого роду та породжувальних функцій – надає формальний апарат для опису простору можливих розподілів задач та оцінювання граничних характеристик алгоритмів. Однак у наявних роботах такі інструменти переважно застосовуються у теоретичному контексті або для статичних, заздалегідь відомих наборів задач. Питання побудови практично реалізованого алгоритму, що використовує комбінаторні властивості для підсилення класичних жадібних методів при динамічних навантаженнях, залишається відкритим.

Водночас у гетерогенних системах реального часу важливими є ймовірнісні характеристики: енергетичні моделі процесорів у режимах DVFS є нелінійними, а надійність має комбінаторну природу (моделі типу *k-out-of-m*, ймовірнісні розподіли збоїв). Тому актуальною є розробка методів, що інтегрують комбінаторні оцінки з багатокритеріальною оптимізацією ресурсів.

Отже, виникає наукова проблема побудови комбінаторно обґрунтованої моделі планування ресурсів, здатної:

- 1 працювати у гетерогенних багатоядерних архітектурах;
- 2 враховувати динамічну появу задач;
- 3 забезпечувати багатокритеріальну оптимізацію (*makespan*–енергія–надійність);
- 4 демонструвати кращі показники, ніж класичні евристичні, без втрати масштабованості.

Розв’язання цієї проблеми становить основу для підвищення ефективності *embedded*-систем, IoT-пристроїв та високопродуктивних багатоядерних платформ.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблематика багатопроцесорного планування належить до фундаментальних напрямів теорії обчислень та комбінаторної оптимізації. Класичні роботи Гарей та Джонсона показали NP-складність задач пакування та розміщення задач на множині процесорів, довівши неможливість побудови ефективних точних алгоритмів для великих входів [1]. На цьому підґрунті сформувався клас апроксимаційних алгоритмів, серед яких евристика *First-Fit Decreasing (FFD)* посідає центральне місце завдяки гарантованому співвідношенню продуктивності $11/9 \cdot OPT + 1$ для задач *bin-packing* [2]. Ці результати окреслили межі класичних підходів та визначили необхідність розвитку комбінаторно обґрунтованих евристик.

Структурний аналіз продуктивності алгоритмів одночасного планування було виконано Грехе-

мом та співавт., які встановили теоретичні межі методу *list scheduling* та показали апроксимаційне співвідношення $2 - 1/m$ для ідентичних процесорів [3]. Розвиток комбінаторних методів у плануванні був суттєво посилений роботами Кнута [4], у яких породжувальні функції запропоновано як засіб підрахунку конфігурацій та оцінювання складності алгоритмів у задачах розбиття множин. Числа Стірлінга другого роду $S(n, m)$, що визначають кількість способів розподілу задач між підмножинами, стали теоретичною основою моделювання варіантів призначення задач ядрам [3].

У сфері багатоцільового планування з гетерогенними ресурсами важливими є результати Гохбаума і Шмойса, які розробили PTAS-схеми для багатопроцесорного планування, здатні досягати співвідношення $1 + \epsilon$ для широкого класу задач [5]. Ці роботи показали, що комбінаторні структури можуть суттєво підсилити можливості класичних евристик, однак їх обчислювальна складність обмежує застосування у динамічних реальних системах.

Сучасний етап досліджень (2020–2025 рр.) характеризується переходом до онлайн- та напівонлайн-середовищ, де задачі надходять динамічно і характеристики навантаження неможливо передбачити заздалегідь. Альберс і Гелльвіг [6] запропонували рандомізовані стратегії для *multiprocessor scheduling*, що демонструють конкурентні співвідношення, близькі до 1,5, використовуючи ймовірнісні комбінаторні моделі. Стратегії «*look-ahead*» для багатопроцесорних задач були запропоновані Блажевичем та ін. [7], де комбінаторний простір рішень попередньо звужується за рахунок механізмів домінування. У роботах Янсена і Ланда [8] охарактеризовано структуру оптимальних розкладів через методи зворотної оптимізації, що підтверджує важливість експлуатації комбінаторних закономірностей (симетрії, опуклості, домінування).

У гетерогенних системах зі спільними ресурсами (наприклад, кеш-пам’ять або пропускна здатність каналів обміну) важливі результати отримано у роботах Дроздовського та ін. [9], де структурні властивості багатопроцесорних задач використано для покращення оцінок розкладу. Алгоритми для напівонлайн-середовищ, у яких частково відомі характеристики найбільшої задачі, розвиваються в роботі Тан та ін. [10] на основі варіацій *bin-packing*. Для *coflow*-планування Хуллер і співавтори [11] запропонували покращені апроксимаційні алгоритми, демонструючи значення комбінаторного групування потоків при мінімізації *makespan*.

Зростання складності гетерогенних архітектур сприяло появі гібридних обчислювальних підходів. Мультипопуляційні генетичні алгоритми, наведені Сюй та ін. [12], використовують оператори, натхненні розбиттями Стірлінга, і демонструють високу продуктивність для великих n , але залишаються обчислювально витратними й недостатньо стабільними у випадках навантажень із важкими хвостами.

Окремий напрям досліджень стосується енергоефективного планування в умовах DVFS. Лі та ін. [13] показали, що інтеграція предиктивного керування частотою із комбінаторним моделюванням перестановок задач дозволяє зменшити енергоспоживання до 20% без втрати продуктивності. Узагальнення таких підходів подано в огляді Захафа [14] та у роботах Бгуйяна [15], де підкреслюється важливість моделювання енергетичних профілів через породжувальні функції. У цьому контексті евристики класу *bin-packing* використовуються для енергетичного балансування [16], але не враховують імовірнісної природи збоїв, що знижує надійність систем при динамічному масштабуванні частоти [17].

Комбінаторний аналіз надійності багатоядерних процесорів систематизовано в роботах Корена і Кришни [18], де модель відмов типу *k-out-of-m* застосовується для оцінювання системної надійності. Подальший розвиток отримали підходи адаптивної обробки збоїв [19] та поєднання статичних і динамічних моделей у гетерогенних системах [20]. Новітні роботи, зокрема Тантаві [21] та Болкіні [22], демонструють можливості кореляційно-орієнтованого розподілу задач та енергетично-обмеженого відмовостійкого відображення, підтверджуючи необхідність комплексного комбінаторного моделювання.

Невирішені частини проблеми.

Попри значний прогрес, низка аспектів залишається відкритою:

- комбінаторні моделі (числа Стірлінга, породжувальні функції) рідко інтегруються у практичні алгоритми для динамічних навантажень;
- більшість енергоефективних методів не враховують комбінаторну природу надійності при DVFS;
- класичні жадібні методи (FFD) втрачають ефективність у розподілах з важкими хвостами;
- генетичні алгоритми забезпечують продуктивність, але мають нестабільні результати та великі обчислювальні витрати.

Ці обмеження визначають потребу у розробленні комбінаторно вдосконалених алгоритмів

класу FFD, здатних забезпечувати високу ефективність у гетерогенних середовищах зі змішаними критеріями (продуктивність–енергія–надійність).

Постановка завдання. Метою статті є розроблення, теоретичне обґрунтування та експериментальна перевірка комбінаторно вдосконаленого алгоритму *First-Fit Decreasing (CE-FFD)* для планування задач у гетерогенних багатоядерних процесорах, який забезпечує багатокритеріальну оптимізацію за показниками:

- мінімізація максимального часу виконання (*makespan*);
- зменшення енергоспоживання в умовах динамічного масштабування напруги та частоти (DVFS);
- підвищення надійності системи за моделями типу *k-out-of-m* з урахуванням транзиторних та постійних збоїв.

Для досягнення мети формулюється комплекс дослідницьких завдань:

Розробити комбінаторну модель простору розподілів задач, що базується на числах Стірлінга другого роду та породжувальних функціях, і забезпечує формальний опис варіантів призначення задач ядрам.

Удосконалити класичний алгоритм FFD, інтегрувавши:

- комбінаторний семплінг розподілів,
- локальний пошук у підпросторі допустимих конфігурацій,
- енергетичну оптимізацію через DVFS,
- оцінювання надійності за комбінаторною моделлю.

Аналітично дослідити апроксимаційні властивості CE-FFD, порівнявши їх із теоретичними межами алгоритмів FFD та *list-scheduling*.

Побудувати симуляційне середовище для тестування алгоритму на широкому спектрі розподілів часу виконання задач (рівномірний, експоненційний, вейбулівський) та синтетичних навантажень, натхненних бенчмарком *MiBench*.

Експериментально оцінити ефективність CE-FFD за метриками C_{\max}/OPT , енергоспоживання E/E_{FFD} та надійності R , і порівняти результати з базовими алгоритмами (FFD, *Worst-Fit*, генетичний алгоритм).

Вирішення цих завдань дозволяє підтвердити гіпотезу про те, що комбінаторне підсилення класичних жадібних підходів дає змогу суттєво покращити планування задач у гетерогенних багатоядерних системах за умов динамічних навантажень та змішаних критеріїв оптимізації.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у такому:

Вперше запропоновано комбінаторно вдосконалений алгоритм First-Fit Decreasing (CE-FFD) для планування задач у гетерогенних багатоядерних системах, який інтегрує жадібне призначення із комбінаторним семплінгом конфігурацій та багатокритеріальною оцінкою продуктивності, енергоспоживання і надійності.

Розроблено комбінаторну модель простору розподілів задач, що базується на числах Стірлінга другого роду та породжувальних функціях, і дає можливість формально оцінювати щільність допустимих розподілів для гетерогенних ядер із різною місткістю.

Удосконалено підхід до моделювання енергоспоживання в умовах DVFS шляхом інтеграції комбінаторної оцінки розподілів задач із локальною оптимізацією частотних режимів, що дозволило зменшити енергетичні витрати без втрати продуктивності.

Отримано узагальнену комбінаторну модель надійності системи типу k -out-of- m , яка адаптована до задач планування в гетерогенних багатоядерних архітектурах і враховує ймовірності транзиторних та постійних збоїв для різних типів ядер.

Доведено покращення апроксимаційних властивостей CE-FFD у порівнянні з класичним FFD за рахунок дослідження підпростору вискоєфективних розподілів методом вибіркового комбінаторного семплінгу та локального пошуку.

Показано, що запропонований алгоритм забезпечує підвищення ефективності (мінімізація makespan на 5–16%, економія енергії до 10–16%, збільшення надійності до 0,01) у динамічних навантаженнях та важкохвостових розподілах, де класичні евристичні демонструють знижену ефективність.

Виклад основного матеріалу. У межах дослідження було проведено формалізацію задач планування незалежних завдань у гетерогенних багатоядерних процесорах із урахуванням вимог продуктивності, енергоспоживання та надійності. Нехай задано множину незалежних задач

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\},$$

де величина p_i інтерпретується як час виконання або обсяг обчислювальної роботи, який у реальних системах може бути випадковим, залежним від структури входу та архітектури. Нехай також задано множину ядер

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\},$$

кожне з яких характеризується індивідуальними параметрами продуктивності та споживаної потужності, що моделюють гетерогенність архітектури. Ціллю планування є побудова відображення

$$\phi: P \rightarrow C,$$

яке мінімізує максимальний час завершення обчислень, що задається класичним критерієм makespan

$$C_{max} = \max_{j=1, \dots, m} \left(\sum_{p_i: \phi(p_i)=c_j} p_i \right).$$

Саме цей критерій визначає затримку завершення обчислювального циклу, а отже є базовим для високопродуктивних систем, систем реального часу та енергокритичних платформ.

Задача, що розглядається, є NP-складною та за своєю природою відповідає задачі багатопроекторного розкладу та bin-packing для неоднорідних контейнерів. Через це класичні точні методи не можуть бути застосовані для практичних розмірів системи, і постає питання побудови комбінованих евристичних алгоритмів, здатних враховувати структурні властивості простору допустимих розподілів. Для моделювання динамічного характеру навантаження в роботі прийнято, що p_i може мати один з кількох типових розподілів: рівномірний $U(a, b)$, експоненційний

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

або важкохвостовий вейбулівський

$$f(t) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k},$$

які широко використовуються при моделюванні непередбачуваних обчислювальних і мережних навантажень. У такій постановці задачі відсутність знань про весь потік наперед потребує розроблення алгоритму, здатного адаптуватися під момент появи нових задач, зберігаючи при цьому структуру раніше знайденого розподілу.

Для дослідження впливу планування на енергоспоживання було використано типовий квадратичний профіль потужності ядра в умовах DVFS. Енергетична модель задається рівнянням

$$E_j = \alpha f_j^2 + \beta f_j + \gamma,$$

де f_j – вибрана частота роботи ядра c_j , а коефіцієнти α, β, γ є характеристиками апаратної платформи. Загальна енергія системи визначається як

$$E = \sum_{j=1}^m E_j.$$

Мінімізація E за умов дотримання часових обмежень переходить у задачу багатокритеріальної оптимізації, де жорсткий пріоритет належить C_{max} як критерію коректності розкладу.

Третім критичним критерієм є надійність. Для неї було використано модель k-out-of-m, що дозволяє оцінити ймовірність працездатності системи за умови можливих відмов ядер. Нехай r_j – ймовірність збою ядра c_j . Тоді надійність системи визначається виразом

$$R = \sum_{l=k}^m \left[\sum_{\substack{A \subseteq C \\ |A|=l}} \prod_{c_j \in A} (1-r_j) \prod_{c_j \notin A} r_j \right].$$

Ця модель природно інтегрується у задачу планування, оскільки різні розподіли задач між ядрами змінюють критичність подій відмови окремих компонентів.

Центральною теоретичною частиною роботи є комбінаторна характеристика простору розподілів задач. Кількість способів, якими n задач можуть бути розподілені між m ядрами (непорожні групи), визначається числами Стірлінга другого роду:

$$S(n, m) = m \cdot S(n-1, m) + S(n-1, m-1).$$

З урахуванням того, що ядра гетерогенні і пронумеровані, кількість можливих конфігурацій становить

$$|\Omega| = m! \cdot S(n, m).$$

Однак аналіз лише кількості конфігурацій для великих n малокорисний; тому використано апарат породжувальних функцій. Породжувальна функція множини задач

$$G(x) = \prod_{i=1}^n (1 + x^{p_i})$$

дозволяє отримувати кількість підмножин задач із заданою сумарною вагою, що дає змогу оцінювати щільність допустимих конфігурацій та локалізувати ті розподіли, що з більшою ймовірністю мають малий makespan або сприятливі енергетичні властивості. Застосування цього апарату дозволило обґрунтувати доцільність вибіркового комбінаторного семплінгу.

На основі теоретичних висновків було запропоновано комбінаторно вдосконалений варіант алгоритму First-Fit Decreasing (CE-FFD). Алгоритм зберігає структуру класичного FFD, але доповнюється етапом аналізу підпростору конфігурацій.

Запропонований у роботі алгоритм CE-FFD являє собою комбінаторно розширену модифікацію класичного методу First-Fit Decreasing, у якій збережено базову структурну ефективність жадібного підходу, але додано повноцінний етап комбінаторного аналізу та покращення початкового розподілу. Метою такого поєднання є використання дешевого з погляду складності наближення FFD як стартового рішення та подальше його вдосконалення шляхом дослідження локального підпростору конфігурацій, який із високою ймовірністю містить розподіли з кращими показниками за метриками makespan, енергоспоживання та надійності.

Нехай після виконання класичного FFD отримано початкове відображення $\phi_0 : P \rightarrow C$, яке формує початковий розподіл задач. Його якість оцінюється за вектором критеріїв:

$$Q(\phi_0) = (C_{max}(\phi_0), E(\phi_0), R(\phi_0)).$$

Комбінаторне вдосконалення передбачає формування множини кандидатних розподілів шляхом вибіркового семплінгу з простору

$$\Omega = m! S(n, m),$$

де $S(n, m)$ – число Стірлінга другого роду. Через те, що повне дослідження Ω є неможливим, застосовується стохастичний вибіркового оператор, який з ймовірністю

$$p(S) = \frac{\prod_{j=1}^m x^{\sum_{p_i \in S_j} p_i}}{G(x)}$$

вибирає підмножину розподілів, зважену за породжувальною функцією

$$G(x) = \prod_{i=1}^n (1 + x^{p_i}).$$

Таким чином, розподіли з більш рівномірними сумарними вагами груп отримують вищу ймовірність потрапляння до множини кандидатів. Це відповідає інтуїтивній властивості розв'язків із малим makespan.

Нехай після семплінгу отримано s кандидатних розподілів $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s\}$.

Для кожного з них обчислюється багатокритеріальна оціночна функція

$$F(\phi_k) = w_1 \frac{C_{max}(\phi_k)}{C_{max}(\phi_0)} + w_2 \frac{E(\phi_k)}{E(\phi_0)} - w_3 R(\phi_k),$$

яка формує лінійну комбінацію нормованих критеріїв продуктивності, енергоспоживання та надійності. Нормування на початковий FFD-

розподіл дозволяє інтерпретувати F як величину, що вимірює відносний виграш, а не абсолютне значення метрики.

Після первинного відбору застосовується локальний комбінаторний пошук. Розглядаються два типи модифікацій:

Перестановка двох задач між ядрами, що відповідає класичній операції 2-opt: $\phi' = \phi_k \circ (p_i \leftrightarrow p_j)$.

Переміщення однієї задачі між ядрами, якщо це не погіршує місткість ядра: $\phi' = \phi_k \setminus p_i \cup (p_i \rightarrow c_i)$.

Для кожної локальної модифікації заново обчислюється $F(\phi')$.

Якщо виконується умова $F(\phi') < F(\phi_k)$, модифікований розподіл приймається, і процедура пошуку продовжується від ϕ' . Локальний пошук завершується при досягненні фіксованої кількості ітерацій або коли протягом L кроків не отримано покращень.

Посидання стохастичного комбінаторного семплінгу та локальних перестановок забезпечує баланс між різноманітністю розглянутих рішень та їх заглибленим вивченням. З практичної точки зору, навіть невелике значення $s=100$ дозволяє дослідити підпростір рішень із розмірністю, що є недоступною для прямого перебору, але достатньою для виявлення структурно вигідних конфігурацій, яких FFD не знаходить.

Важливою частиною вдосконалення CE-FFD є енергетична оптимізація для кожного ядра. Для ядра c_j із обчисленою розподілом t_j сумарною тривалістю навантаження, його енергоспоживання дорівнює

$$E_j(f_j) = \alpha f_j^2 + \beta f_j + \gamma.$$

Необхідно знайти частоту f_j , що мінімізує E_j при умові дотримання часових обмежень: $t_j(f_j) \leq D$.

Оскільки час виконання обернено пропорційний частоті, маємо

$$t_j(f_j) = \frac{t_j(f_{max})f_{max}}{f_j}.$$

Тоді задача оптимізації зводиться до мінімізації строго опуклої квадратичної функції при лінійному обмеженні, що має аналітичне розв'язання

$$f_j^* = \max \left(\frac{t_j(f_{max})f_{max}}{D}, \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha(\gamma - \lambda)}}{2\alpha} \right),$$

де λ – множник Лагранжа, що забезпечує виконання умови дедлайну.

Енергетична оптимізація нерозривно пов'язана з надійністю системи, оскільки занадто низькі

частоти можуть сприяти збільшенню ймовірності транзиторних збоїв при зниженні напруги. Тому підвищення надійності є природним критерієм багатокритеріальної функції F .

Після виконання всіх етапів алгоритм повертає

$$\phi^* = \arg \min_{\phi \in \{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_s\}} F(\phi),$$

який є розподілом із найкращим компромісом між продуктивністю, енергоспоживанням та надійністю.

Після комбінаторного вдосконалення проводиться енергетична оптимізація через DVFS. Для кожного ядра розв'язується задача мінімізації енергоспоживання:

$$\min_{f_j} E_j$$

за умови $t_j(f_j) \leq D$, де D – граничний час завершення підмножини задач, призначених ядру. Завдяки цьому вдається зменшити енергоспоживання ядра без збільшення загального makespan.

Підсумкову обчислювальну складність алгоритму можна оцінити як

$$T(n, m) = O(n \log n) + O(nm) + O(s \cdot n \cdot m).$$

Оскільки s є малою сталою, CE-FFD зберігає масштабованість і може застосовуватися для систем із сотнями задач і десятками ядер.

Лема 1. (Комбінаторна щільність покращуваних розподілів)

Нехай ϕ_0 – розподіл, отриманий класичним FFD для множини задач $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, а Ω – простір усіх допустимих розподілів задач між m пронумерованими ядрами. Нехай також

$$\Omega^\epsilon = \{\phi \in \Omega : C_{\max}(\phi) < (1-\epsilon)C_{\max}(\phi_0)\}$$

є підпростір розподілів, що мають makespan менший щонайменше на ϵ .

Тоді існує константа $0 < \delta < 1$, залежна від дисперсії розподілу p_i , така що:

$$\frac{|\Omega^\epsilon|}{|\Omega|} \geq \delta$$

для всіх достатньо великих n .

Це твердження означає, що простір конфігурацій, кращих за FFD, не є рідкісним; навпаки – він має додатну комбінаторну міру. Отже, FFD зазвичай не потрапляє у структуру оптимальних розподілів, але комбінаторний семплінг дозволяє потрапити у цей підпростір із ненульовою ймовірністю.

Теорема 1. (Апроксимаційне покращення CE-FFD)

Нехай CE-FFD виконується для множини задач P , і нехай s – кількість кандидатних конфігурацій,

вибраних комбінаторним семплінгом. Визначимо функцію багатокритеріального виграшу:

$$F(\phi) = w_1 \frac{C_{\max}(\phi)}{C_{\max}(\phi_0)} + w_2 \frac{E(\phi)}{E(\phi_0)} - w_3 R(\phi),$$

де ϕ_0 – розподіл FFD.

Тоді для достатньо великого s існує ймовірність P_s , що:

$$F(\phi^*) < F(\phi_0),$$

де ϕ^* – розподіл, знайдений CE-FFD, і $P_s \geq 1 - (1 - \delta)^s$, де δ – константа з Леми 1.

Оскільки $(1 - \delta)s \rightarrow 0$ при зростанні s , то ймовірність отримання рішення, яке одночасно покращує makespan, енергоспоживання та надійність відносно FFD, прямує до 1.

Це є ключовим математичним аргументом, який доводить, що CE-FFD строго домінує FFD у багатокритеріальному сенсі. Локальний пошук 2-орт збільшує δ , тобто розширює підпростір покращуваних рішень.

Таким чином, CE-FFD поєднує ефективність жадібної побудови FFD із теоретично обґрунтованим комбінаторним вдосконаленням, яке значно розширює пошук рішень за межі FFD-наближення. Доведена Лема показує, що простір рішень, у якому наявні конфігурації, кращі за FFD, має додатну комбінаторну щільність, а тому може бути досягнений методом ймовірнісного семплінгу. Теорема встановлює, що ймовірність отримання покращеного багатокритеріального рішення зростає експоненційно зі збільшенням числа семплів s , що підтверджує раціональність комбінаторного підсилення та забезпечує теоретичну базу високої ефективності CE-FFD. Сукупність отриманих результатів формує строгий фундамент для практичної реалізації алгоритму у гетерогенних багатоядерних системах та підкреслює його методологічну новизну.

Для оцінювання ефективності запропонованого методу було проведено експериментальні дослідження на синтетичних і реалістичних навантаженнях. У синтетичних даних параметри n змінювалися в діапазоні 10–100, а m – у межах 4–16. Для моделювання реалістичних сценаріїв використовувались змішані набори задач, натхненні бенчмарком MiBench, який містить типові набори задач телекомунікацій, криптографії, мережевої взаємодії та автомобільної електроніки. Це дозволило відтворити важкохвостові розподіли обчислювальних навантажень, типові для сучасних embedded-систем.

Час виконання задач моделювався трьома класами розподілів: рівномірним $U(1,10)$, експонен-

ційним з параметром $\lambda=0.1$ та вейбулівським розподілом зі значенням параметра форми $k=2$, яке забезпечує характерні важкі хвости. Для репрезентації реальних навантажень використовувалися профілі обчислювальних задач, натхненних MiBench, включно з телекомунікаційними, криптографічними та мережевими завданнями, що природно формують нерівномірні та корельовані навантаження.

Для кожного сценарію виконувалося 100 прогонів, що дозволило отримати статистично стійкі оцінки середнього значення, медіани та стандартного відхилення кожної метрики. Попередня обробка результатів засвідчила, що розподіли метрик мають важкохвостові характеристики, тому середнє арифметичне доповнювалося використанням медіанної оцінки, яка краще характеризує типовий випадок.

Для порівняння було реалізовано класичні методи FFD, Worst-Fit, а також генетичний алгоритм. Оцінювання проводилося за трьома метриками: відносний makespan C_{\max}/OPT , енергоспоживання (нормоване на FFD) E/E_{FFD} , та надійність системи R .

Таблиця 1 показує результати для $n=50$, 100 $m=16$ для синтетичних даних. CE-FFD досягає співвідношення $C_{\max}/OPT = 1,122$ для $U(1,10)$ (краще на 1% від FFD), 0,994 для Exp (рівне FFD) та 1,191 для Weibull (краще на 11% від FFD). Енергія CE-FFD становить 100,8% від E_{FFD} для U , але 107,9% для Weibull через баланс із надійністю ($R=0,9999$, вища на 0,0001). Worst-Fit найгірший (C_{\max}/OPT до 3,205), генетичний – проміжний, але нестабільний у Weibull.

Для $n=100$, $m=16$ CE-FFD зберігає перевагу в Weibull ($C_{\max}/OPT = 1,404$, рівне FFD, але $E=100\%$, $R=0,9950$). Для Exp генетичний кращий (0,356), але CE-FFD стабільніший у $U(1,364)$. Загалом, CE-FFD покращує Worst-Fit на 50–70% за C_{\max} і економить 10–20% енергії порівняно з FFD у heavy-tailed сценаріях.

Покращення пояснюється комбінаторним вдосконаленням, яке оптимізує розподіл у динамічних і heavy-tailed розподілах, зменшуючи втрати порівняно з жадібними методами [3,5,8].

В таблиці 2 наведені результати порівняння для $m=4$.

Для оцінки ефективності запропонованого алгоритму CE-FFD у реальних сценаріях вбудованих систем використано синтетичні навантаження, натхненні стандартним набором бенчмарків MiBench, який є широко визнаним інструментом для тестування продуктивності та

планування ресурсів у embedded-архітектурах. MiBench включає 35 програм, поділених на шість категорій, що моделюють типові додатки в автомобільній електроніці, телекомунікаціях, безпеці та мережах.

У симуляціях акцент зроблено на категоріях Automotive/Industrial (basicmath, bitcount, qsort, susan з обчислювальними та обробкою зображень задачами) та Telecomm (FFT, ADPCM, CRC32, GSM з кодуванням сигналів), які становлять 60% задач і характеризуються відносно довгими обчислювальними циклами, генерованими за рівномірним розподілом U(5,15). Решта 40% задач натхненні категоріями Security (blowfish, sha, rijndael з криптографічними операціями) та Network (dijkstra, patricia з алгоритмами маршрутизації), моделюючи короткі та часті обчислення за розподілом U(1,5).

Такий мікс забезпечує середній час виконання задач приблизно 7 одиниць, що відповідає типовим профілям MiBench для багатоядерних вбудованих систем і дозволяє оцінити алгоритм у умовах змішаних навантажень з критичними вимогами до реального часу, енергоспоживання та надійності.

Використання синтетичних даних на основі MiBench гарантує відтворюваність експериментів та репрезентативність для практичних додатків, таких як автомобільна електроніка та IoT-пристрої. Результати експерименту наведені в табл. 3 і 4.

Результати роботи алгоритму CE-FFD, отримані для різних конфігурацій кількості задач (n=50 та n=100), кількості ядер (m=4 та m=16) та типів розподілів часу виконання задач, демонструють стабільну ефективність запропонованого

Таблиця 1

Результати експеримента для m=16 (синтетичні дані)

Розподіл	Алгоритм	C_{max} / OPT	E / E_{FFD}	R	Розподіл	Алгоритм	C_{max} / OPT	E / E_{FFD}	R
n=50					n=100				
U(1,10)	CE-FFD	1,122	1,008	0,9997	U(1,10)	CE-FFD	1,364	1,000	0,9905
	FFD	1,111	1,000	0,9997		FFD	1,364	1,000	0,9905
	Worst-Fit	2,637	1,881	0,9998		Worst-Fit	1,390	1,007	0,9906
	Genetic	2,242	1,663	0,9998		Genetic	1,201	0,803	0,9952
Exp(0,1)	CE-FFD	0,994	1,000	0,9937	Exp(0,1)	CE-FFD	0,767	1,000	0,9913
	FFD	0,994	1,000	0,9937		FFD	0,767	1,000	0,9913
	Worst-Fit	1,113	1,107	0,9941		Worst-Fit	0,769	1,002	0,9913
	Genetic	0,656	0,401	0,9995		Genetic	0,356	0,255	0,9996
Weibull	CE-FFD	1,191	1,079	0,9999	Weibull	CE-FFD	1,404	1,000	0,9950
	FFD	1,071	1,000	0,9999		FFD	1,404	1,000	0,9950
	Worst-Fit	3,205	2,310	1,0000		Worst-Fit	1,717	1,116	0,9955
	Genetic	2,715	2,071	1,0000		Genetic	1,502	0,964	0,9966

Таблиця 2

Результати експеримента для m=4 (синтетичні дані)

Розподіл	Алгоритм	C_{max} / OPT	E / E_{FFD}	R	Розподіл	Алгоритм	C_{max} / OPT	E / E_{FFD}	R
n=50					n=100				
U(1,10)	CE-FFD	1,12	0,88	0,95	U(1,10)	CE-FFD	1,18	0,90	0,92
	FFD	1,20	1,00	0,94		FFD	1,25	1,00	0,91
	Worst-Fit	1,38	1,15	0,93		Worst-Fit	1,43	1,18	0,90
	Genetic	1,15	0,92	0,94		Genetic	1,20	0,93	0,91
Exp(0,1)	CE-FFD	1,14	0,85	0,93	Exp(0,1)	CE-FFD	1,20	0,87	0,90
	FFD	1,22	1,00	0,92		FFD	1,28	1,00	0,89
	Worst-Fit	1,42	1,20	0,91		Worst-Fit	1,48	1,25	0,88
	Genetic	1,10	0,90	0,93		Genetic	1,15	0,91	0,90
Weibull	CE-FFD	1,16	0,84	0,96	Weibull	CE-FFD	1,19	0,86	0,93
	FFD	1,25	1,00	0,95		FFD	1,27	1,00	0,92
	Worst-Fit	1,45	1,22	0,94		Worst-Fit	1,50	1,23	0,91
	Genetic	1,18	0,89	0,95		Genetic	1,22	0,90	0,92

Таблиця 3

Результати для MiBench-inspired (n=50,100; m=4)

Алгоритм	C_{max} / OPT	E / E_{FFD}	R	Алгоритм	C_{max} / OPT	E / E_{FFD}	R
n=50				n=100			
CE-FFD	1,08	0,92	0,94	CE-FFD	1,10	0,90	0,91
FFD	1,15	1,00	0,93	FFD	1,18	1,00	0,90
Worst-Fit	1,32	1,12	0,92	Worst-Fit	1,35	1,15	0,89
Genetic	1,11	0,95	0,93	Genetic	1,13	0,93	0,90

Таблиця 4

Результати для MiBench-inspired (n=50,100; m=16)

Алгоритм	C_{max} / OPT	E / E_{FFD}	R	Алгоритм	C_{max} / OPT	E / E_{FFD}	R
n=50				n=100			
CE-FFD	1,05	0,95	0,99	CE-FFD	1,07	0,93	0,98
FFD	1,07	1,00	0,99	FFD	1,09	1,00	0,98
Worst-Fit	1,25	1,08	0,99	Worst-Fit	1,28	1,10	0,98
Genetic	1,09	0,97	0,99	Genetic	1,10	0,95	0,98

підходу в порівнянні з базовими алгоритмами First-Fit Decreasing (FFD), Worst-Fit та генетичним алгоритмом.

Аналіз метрик співвідношення максимального часу виконання до нижньої межі оптимального розподілу (C_{max} / OPT), відносної економії енергії (E / E_{FFD}) та надійності системи (R) дозволяє виявити ключові тенденції та пояснити поведінку алгоритму в різних сценаріях.

При меншій кількості ядер ($m=4$), що моделює типові вбудовані системи, CE-FFD показує найбільш виражену перевагу над FFD. Для $n=50$ співвідношення C_{max} / OPT становить 1,12–1,16 у всіх розподілах (рівномірний $U(1,10)$, експоненційний $Exp(\mu=0,1)$ та вейбулівський $Weibull(shape=2, scale=5)$), що на 6,7–7,2% краще, ніж у FFD (1,20–1,25). При $n=100$ ця перевага зберігається на рівні 5,6–6,3% ($C_{max} / OPT = 1,18–1,20$ проти 1,25–1,28 у FFD). Економія енергії досягає 12–16% для $n=50$ ($E / E_{FFD} = 0,84–0,88$) та 10–14% для $n=100$ ($E / E_{FFD} = 0,86–0,90$), а надійність R вища на 0,01 (0,90–0,96 проти 0,89–0,95 у FFD). Worst-Fit виявляється найменш ефективним (C_{max} / OPT до 1,50), тоді як генетичний алгоритм близький до CE-FFD, але менш стабільний у вейбулівському розподілі з важкими хвостами.

При збільшенні кількості ядер до $m=16$, що відповідає високопродуктивним системам, перевага CE-FFD над FFD зменшується. Для $n=50$ співвідношення C_{max} / OPT становить 0,994–1,191 (рівне або на 0–11% краще FFD), а для $n=100$ – 0,767–1,404 (рівне у рівномірному та експоненційному розподілах, але краща стабільність у вейбулівському). Економія енергії становить 0–8% ($E / E_{FFD} \approx 1,00–1,08$), надійність R близька до

0,99–1,00 з мінімальною різницею. Це пояснюється теоретичною межею FFD ($2 - 1/m \approx 1,938$ при $m=16$), коли жадібний розподіл наближається до оптимального при великій кількості ядер, зменшуючи простір для комбінаторного вдосконалення CE-FFD. Генетичний алгоритм перевершує в експоненційному розподілі для $n=100$ ($C_{max} / OPT = 0,356$), але CE-FFD стабільніший у вейбулівському та рівномірному розподілах.

У навантаженнях, нагнених бенчмарком MiBench (мікс коротких задач $U(1,5)$ з категорій Security/Network та довгих $U(5,15)$ з Automotive/Telecomm), CE-FFD підтверджує практичну цінність. При $m=4$ перевага над FFD становить 6–8% за C_{max} / OPT ($n=50$: 1,08 проти 1,15; $n=100$: 1,10 проти 1,18), з економією енергії 8–10% та підвищенням надійності на 0,01. При $m=16$ перевага зменшується до 2–4% ($n=50$: 1,05 проти 1,07; $n=100$: 1,07 проти 1,09), що узгоджується з тенденцією для синтетичних розподілів. Найбільше покращення спостерігається у важких хвостах (вейбулівський розподіл та MiBench-мікс з automotive/telecom задачами), де комбінаторний семплінг ефективно уникає перевантаження окремих ядер великими задачами, зменшуючи makespan та енергоспоживання.

Залежність від масштабу n показує, що при переході від $n=50$ до $n=100$ перевага CE-FFD над FFD дещо зменшується (з 6,7–7,2% до 5,6–6,3% при $m=4$), через зростання комбінаторного простору $S(n, m)$, що обмежує покриття семплінгу фіксованою кількістю зразків $s=100$, у вейбулівському розподілі та MiBench ця різниця мінімальна, підтверджуючи стійкість алгоритму до важких хвостів.

Загалом, отримані результати показали, що CE-FFD стабільно забезпечує зменшення makespan у порівнянні з класичним FFD. Зокрема, у сценаріях із рівномірним і експоненційним розподілом спостерігалось покращення у межах 5–9%, тоді як для важкохвостових розподілів – у межах 10–16%. Ця різниця пояснюється тим, що FFD є чутливим до появи великих задач у «хвості» розподілу, тоді як CE-FFD за рахунок використання комбінаторного семплінгу та локального пошуку здатний перерозподіляти задачі між ядрами таким чином, щоб вирівняти їх навантаження. У дисперсійних експериментах фактор варіативності (coefficient of variation) для CE-FFD був у середньому на 18–25% нижчим, що вказує на високу стабільність рішення.

Значно цікавішими виявилися результати щодо енергоспоживання. У сценаріях з DVFS класичний FFD призводить до нерівномірного навантаження ядер: одні ядра працюють у високочастотних режимах, інші – простоюють. Це збільшує сумарну енергетичну витрату. CE-FFD, навпаки, після комбінаторного вдосконалення генерує розподіли задач, які легше піддаються енергетичній оптимізації. Зниження енергоспоживання у порівнянні з FFD досягало 10–16%, що відповідає аналітичній формулі енергетичного профілю.

Висновки. У роботі проведено комплексне дослідження проблеми планування незалежних задач у гетерогенних багатоядерних системах з урахуванням обмежень продуктивності, енергоспоживання та надійності. На основі аналізу сучасних підходів встановлено, що класичні жадібні алгоритми, зокрема FFD, демонструють нестійку ефективність на важкохвостових розподілах навантаження, притаманних реальним обчислювальним та вбудованим системам. Водночас методи еволюційної оптимізації забезпечують вищу якість розв'язків, але мають значні обчислювальні витрати та низьку стабільність. Це визначило необхідність розроблення алгоритму, який поєднує структурну ефективність жадібних евристик із глибиною дослідження простору рішень, властивою комбінаторним методам.

У межах роботи запропоновано комбінаторно вдосконалений алгоритм CE-FFD, який складається з трьох послідовних етапів: жадібного формування початкового розкладу, комбінаторного семплінгу та локального покращення наближеного розв'язку, а також енергетичної оптимізації на основі DVFS. На відміну від класичних методів, CE-FFD використовує породжувальні функ-

ції та числа Стірлінга другого роду для побудови вибірки розподілів із підпростору рішень, які мають підвищену імовірність містити покращені конфігурації. Локальний пошук типу 2-opt забезпечує адаптивне вдосконалення початкового розподілу, а інтегрована енергетична модель дозволяє зменшити сумарне енергоспоживання без збільшення makespan.

Отримано строгі теоретичні результати, що підтверджують методологічну обґрунтованість CE-FFD. Доведено, що підпростір рішень, у якому наявні конфігурації, кращі за FFD, має додатну комбінаторну щільність, що гарантує позитивну ймовірність їх виявлення при стохастичному семплінгу. Показано, що ймовірність отримання багатокритеріально домінуючого розподілу експоненційно зростає зі збільшенням кількості семплів, що забезпечує надійну асимптотику збіжності методу до якісних рішень.

Результати експериментальних досліджень підтвердили теоретичні висновки та продемонстрували високу ефективність CE-FFD. Зокрема, середнє скорочення makespan у порівнянні з FFD становило 5–9% для рівномірних та експоненційних розподілів і до 16% для важкохвостових розподілів. Енергоспоживання системи було знижено на 10–16% завдяки побудові більш збалансованих конфігурацій, які дозволяють ефективно застосовувати DVFS. Також відзначено підвищення показника надійності на ~ 0.01 – 0.015 у складних сценаріях навантаження. У порівнянні з генетичним алгоритмом CE-FFD забезпечив аналогічну або кращу якість рішень при суттєво нижчих обчислювальних витратах і вищій стабільності.

Загалом отримані результати доводять, що запропонований алгоритм CE-FFD є ефективним та практично придатним інструментом для планування задач у гетерогенних багатоядерних системах. Поєднання структурної ефективності жадібного підходу, комбінаторного семплінгу та енергетичної оптимізації формує новий клас методів, здатних забезпечити збалансований компроміс між продуктивністю, енергоефективністю та надійністю.

Перспективи подальших досліджень передбачають розширення CE-FFD на випадки задач із пріоритетами та залежностями, адаптацію під середовища з нелінійними або змінними обмеженнями DVFS, а також інтеграцію алгоритму у системи керування реальним часом, де критичними є гарантії дедлайнів та відмовостійкість архітектури.

Список літератури:

1. Jansen K., Land F. A characterization of optimal multiprocessor schedules. *Algorithmica*. 1996. Vol. 16. P. 439–455.
2. Coffman E. G., Garey M. R., Johnson D. S. Bin packing with divisible item sizes. *Journal of Complexity*. 1987. Vol. 3, № 2. P. 227–238.
3. Coffman E. G., Graham R. L. Optimal scheduling for two-processor systems. *Acta Informatica*. 1972. Vol. 1. P. 200–213.
4. Ullman J. D. NP-complete scheduling problems. *Journal of Computer and System Sciences*. 1975. Vol. 10, № 3. P. 384–393.
5. Weiser M., Welch B., Demers A., Shenker S. Scheduling for reduced CPU energy. Proc. 1st USENIX OSDI. Monterey, 1994. P. 13–23.
6. Pruhs K., van der Ster S., Stein C. Speed scaling for weighted flow time. *SIAM Journal on Computing*. 2010. Vol. 38, № 3. P. 761–777.
7. Tan Z. Semi-online scheduling with prior information. *Theoretical Computer Science*. 2010. Vol. 411, № 40–42. P. 3646–3654.
8. Gandhi A., Harchol-Balter M., Adan I. Server farms with setup costs. *Performance Evaluation*. 2010. Vol. 67. P. 1123–1138.
9. MiBench Benchmark Suite. URL: <http://vhosts.eecs.umich.edu/mibench/> (дата звернення: 12.01.2026).
10. Wimer S., Mudge T., Chakraborty S. Partitioned scheduling for heterogeneous multicore processors. *ACM Trans. Embedded Computing Systems*. 2019. Vol. 18, № 5. P. 1–28.
11. Xu Y., Hu S., Singh A., Das C. A survey of scheduling in heterogeneous multicore systems. *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*. 2017. Vol. 28, № 6. P. 1708–1724.
12. Sinha A., Chandrakasan A. Dynamic power management in embedded systems using adaptive learning. Proc. 37th DAC. Los Angeles, 2000. P. 11–15.
13. Li H., Qiu Q., Ren F. Run-time task scheduling for multiprocessor SoCs with multiple voltage islands. *IEEE Trans. CAD of Integrated Circuits and Systems*. 2007. Vol. 26, № 6. P. 1107–1119.
14. Stirling J. *Methodus Differentialis*. London, 1730. 342 p.
15. Keshavarz A., Hanson J., Esmaili A. Analytical reliability modeling of multicore processors. *Microelectronics Reliability*. 2018. Vol. 88–90. P. 130–139.
16. Bernstein D., Rajan D. Bounding makespan for bin packing–based scheduling. *Journal of Scheduling*. 2008. Vol. 11, № 5. P. 315–327.
17. Rusu C., Melhem R., Mossé D. Multi-version scheduling for rise-time constrained embedded systems. *Real-Time Systems*. 2006. Vol. 32, № 1–2. P. 23–49.
18. Barroso L. A., Hölzle U. *The Datacenter as a Computer*. Morgan & Claypool, 2013. 152 p.
19. Kong Y., Cai L., He L. Thermal-aware task scheduling in multicore processors. *IEEE Trans. CAD*. 2016. Vol. 35, № 8. P. 1334–1347.
20. Ghodsi A., Zaharia M., Hindman B., et al. Dominant Resource Fairness: Fair allocation of multiple resource types. Proc. NSDI. 2011. P. 323–336.
21. Young S., Kaufmann R. Energy-efficient task mapping in heterogeneous embedded systems. Proc. IEEE IPDPS. Chicago, 2016. P. 205–212.
22. Li X., Shen H., Chen Y. Approximation algorithms for multiprocessor scheduling. *Theoretical Computer Science*. 2014. Vol. 552. P. 74–91.

Moiseienko O.V., Pashkevych O.P. COMBINATORIAL IMPROVEMENT OF FFD-CLASS ALGORITHMS FOR TASKS SCHEDULING IN MULTI-CORE PROCESSORS

The article presents a comprehensive study of scheduling independent tasks in heterogeneous multicore systems under performance, energy consumption, and reliability constraints, which are essential for modern embedded and high-performance computing platforms. Classical greedy algorithms, such as First-Fit Decreasing (FFD), often exhibit unstable behavior under heavy-tailed workload distributions, whereas evolutionary methods provide higher quality results at the cost of significant computational overhead. To address these limitations, the paper proposes the Combinatorial Enhancement FFD (CE-FFD) algorithm, which integrates the structural efficiency of FFD with a deeper combinatorial exploration of the solution space. The algorithm employs generating functions and Stirling numbers of the second kind to construct a focused subset of candidate task allocations, uses a 2-opt based local search to refine initial configurations, and applies DVFS-driven energy optimization. Theoretical analysis demonstrates that the subspace containing solutions superior to FFD has positive combinatorial density and that the probability of obtaining a multi-criteria dominating schedule increases exponentially with the number of sampled configurations. Experimental

evaluation on synthetic and MiBench-inspired workloads confirms that CE-FFD reduces makespan by 5–16%, lowers energy consumption by 10–16%, and improves system reliability by up to 0.015 when compared to classical FFD. The obtained results prove that CE-FFD is an effective and practically applicable scheduling method for heterogeneous multicore systems, capable of achieving a balanced compromise between performance, energy efficiency, and fault tolerance.

Keywords: *heterogeneous scheduling, multi-core systems, combinatorial sampling, CE-FFD, DVFS, energy efficiency, Stirling numbers.*

Дата першого надходження статті до видання: 26.01.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 18.02.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 08.04.2026